**§ 4. Формула Тейлора** (окончание лекции)

**п. 4. Формула Макларена**

***Определение*.** Формулой Макларена принято называть формулу Тейлора при :

. (5)

Остаточный член  имеет вид:

– в форме Лагранжа: ;

– в форме Пеано: .

***Разложение по формуле Макларена некоторых элементарных функций***

1. . Так как

,

,

то формула Макларена имеет вид

, (6)

где  имеет вид:

– в форме Лагранжа: ;

– в форме Пеано: .

1. . Имеем:

; ;

; … .

Тогда



Следовательно,

 , (7)

где  имеет вид:

– в форме Лагранжа: ;

– в форме Пеано: .

1. . Так как

,



то формула Макларена имеет вид

, (8)

где  имеет вид:

– в форме Лагранжа: ;

– в форме Пеано: .

1. , где  – вещественное число. Так как

,

,

то формула Макларена имеет вид

, (9)

где  имеет вид:

– в форме Лагранжа: ;

– в форме Пеано: .

В частном случае, когда  – натуральное число, , следовательно , и мы получим формулу бинома Ньютона

. (10)

1. . Имеем:

; ;

; ;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

, 

Следовательно,

 , (11)

где  имеет вид:

– в форме Лагранжа: ;

– в форме Пеано: .

***Пример*.** Разложить функцию  по формуле Маклорена до члена с  включительно.

***Решение.***  ▲ Воспользуемся разложением функции  по формуле Маклорена до члена с  включительно:

.

Следовательно,

, где .

Тогда



. ▲

**п. 5. Приложения формулы Тейлора**

**а)** ***Вычисление значений функций с заданной точностью***

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа позволяет не только находить приближенные значения функций, но и оценивать допущенную при этом погрешность.

***Пример*.** Вычислить число *е* с точностью до .

***Решение.*** ▲ Запишем формулу Маклорена для функции  с остаточным членом в форме Лагранжа:

.

Полагая , получим

.

Для нахождения *е* с точностью до  определим  из условия, что остаточный член  меньше . Так как , то . Поэтому

.

Нетрудно посчитать, что неравенство  выполняется при . Следовательно, чтобы найти число *е* с заданной точностью, надо взять :

. ▲

**б)** ***Вычисление пределов функций***

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано является эффективным средством для вычисления пределов функций.

***Пример*.** Вычислить .

***Решение.*** ▲ Так как  при , следовательно, нужно функцию  представить формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до члена с  включительно.





. ▲